BAB II
TINJAUAN UMUM DAN PERMASALAHAN

2.1 Regresi Linier

Analisis regresi merupakan suatu metode yang digunakan untuk menganalisis hubungan antar peubah, di mana terdapat peubah prediktor dan peubah respon. Model regresi yang memuat satu peubah respon dan satu peubah prediktor disebut dengan regresi linier sederhana, sedangkan jika menggunakan beberapa peubah prediktor maka dinamakan regresi linier berganda. Bentuk umum dari regresi linier berganda adalah sebagai berikut (Draper dan Smith, 1998):

$$y_i = \beta_0 + \sum_{k=1}^{p} \beta_j x_{ki} + \varepsilon_i \tag{2.1}$$

di mana:

y_i : nilai pengamatan ke-*i* peubah respon, *i* = 1,2,…,*n*
x_{ki} : nilai pengamatan ke-*i* peubah prediktor *k*
β_0 : nilai intersep model regresi
β_k : koefisien parameter regresi untuk peubah prediktor *k*
ε_i : sisaan pada pengamatan ke-*i* dengan asumsi $\varepsilon_i \sim NIID(0, \sigma^2)$
n : banyaknya unit pengamatan
k : banyaknya peubah prediktor, *k* = 1,2,…*p*

Model regresi linier berganda pada persamaan (2.1) dapat ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.2}$$

dengan:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

di mana:

$\boldsymbol{Y}$: vektor peubah respon berukuran $n \times 1$
$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter regresi berukuran $(k+1) \times 1$
$\mathbf{X}$: matriks peubah prediktor berukuran $n \times (k+1)$
$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor sisaan berukuran $n \times 1$
n : banyak pengamatan

Nilai parameter regresi $\boldsymbol{\beta}$ diduga dengan persamaan berikut:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \tag{2.3}$$

Asumsi yang melandasi penduga parameter regresi $\boldsymbol{\beta}$ pada persamaan (2.3) yaitu:

a. $E(\varepsilon_i) = 0$
b. $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$
c. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, untuk $i \neq j$

Berdasarkan persamaan (2.3), nilai ε_i (sisaan) untuk melakukan uji autokorelasi spasial dapat dihitung dengan rumus berikut:

$$\varepsilon_i = y_i - (\beta_0 + \sum_{k=1}^{p} \beta_j x_{ki}) \qquad (2.4)$$

2.2 Data Spasial

Menurut Cressie (1993), data spasial adalah data yang berkaitan dengan aspek keruangan dan menyajikan lokasi geografis atau gambaran nyata suatu wilayah di permukaan bumi. Data spasial memiliki sebuah system koordinat tertentu sebagai dasar referensinya. Data spasial memiliki dua bagian penting yang membuatnya berbeda dari data lain, yaitu:

1. Komponen spasial

   Komponen spasial merupakan suatu hubungan topologis antar komponen dari entitas data spasial seperti hubungan antara titik, ttik dengan garis, titik dengan area garis dengan garis, garis dengan area, dan area dengan area lainnya. Hubungan ini menjelaskan posisi relatif suatu fenomena, kaitan sebab akibat fenomena, arah, keterkaitan, dan lain-lain.

2. Komponen atribut

   Komponen atribut merupakan data deskriptif dari sebuah obyek data spasial. Komponen atribut ini dapat berupa data tabular, data deskriptif (seperti laporan dan sesnsus), gambar, grafik, bahkan foto data video. Atribut memberikan penjelasan mengenai kualitas dan kuantitas fenomena.

2.3 Ekonometrika Spasial

Menurut Gujarati (2006), ekonometrika dapat didefinisikan sebagai ilmu sosial di mana perangkat teori ekonomi, matematika, dan statistik inferensial diterapkan untuk menganalisis fenomena ekonomi. Secara umum, ekonometrika berbeda dengan analisis statistik lain yang berfokus pada model teoritis di mana parameter tersebut diduga dengan analisis regresi. Ekonometrika spasial cenderung dimulai dari teori atau model khusus dan fokus pada permasalahan estimasi, spesifikasi, dan pengujian ketika terdapat efek ekonometrika spasial (Anselin, 1988).

Pada analisis spasial dibutuhkan data spasial. LeSage (1999) juga menyatakan bahwa ekonometrika spasial yang diterapkan dalam pengetahuan wilayah sangat bergantung pada sampel yang dikumpulkan dengan mengacu pada lokasi yang diukur dalam ruang. Berawal dari teori ekonomi, ekonometrika spasial dapat digunakan untuk mengkaji hubungan antarvariabel ekonomi yang terdapat dalam teori tersebut dengan membuat suatu hipotesis dan memodelkannya dengan mempertimbangkan unsur lokasi.

Secara umum model spasial dapat dinyatakan sebagai berikut (Anselin, 1988):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{\delta W y} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{WX\theta} + \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{\lambda W u} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &\sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

di mana:

$\boldsymbol{y}$: vektor peubah respon berukuran $n \times 1$
$\boldsymbol{X}$: matriks peubah prediktor berukuran $n \times (k+1)$
$\boldsymbol{\beta}$: vektor parameter koefisien regresi berukuran $(k+1) \times 1$
$\boldsymbol{\delta}$: koefisien spasial untuk *lag* pada peubah respon berukuran $n \times 1$
$\boldsymbol{\theta}$: koefisien spasial untuk *lag* pada peubah prediktor berukuran $p \times 1$
$\boldsymbol{\lambda}$: koefisien spasial untuk *lag* pada prediktor berukuran $p \times 1$
$\boldsymbol{W}$: matriks pembobot yang berukuran $n \times n$ dengan elemen diagonal utama nol
$\boldsymbol{u}$: vektor sisaan berukuran $n \times 1$
$\boldsymbol{\varepsilon}$: vektor sisaan berukuran $n \times 1$ yang berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan ragam $\sigma^2 \boldsymbol{I}$
$\boldsymbol{I}$: matriks identitas berukuran $n \times n$
n : banyak lokasi yang diamati, $i = 1,2,\ldots,n$

Sisaan regresi diasumsikan mempunyai autokorelasi secara spasial. $\boldsymbol{W}$ merupakan matriks pembobot yang menunjukkan hubungan *contiguity* atau fungsi jarak antar lokasi dan diagonal utamanya bernilai nol.

2.4 Matriks Kontiguitas

Matriks kontiguitas adalah matriks yang menggambarkan status ketetanggan antar lokasi yang dinotasikan dengan **C** dan c_{ij} merupakan elemen dari matriks **C**. Elemen c_{ij} bernilai 1 jika lokasi ke-*j* bertetangga dengan lokasi ke-*i* dan elemen c_{ij} bernilai 0 jika lokasi ke-*j* tidak bertetangga dengan lokasi ke-*i*. Matriks **C** menunjukkan hubungan *contiguity* atau fungsi jarak antar lokasi dan merupakan matriks simetris dengan semua elemen diagonal utama bernilai 0 karena diasumsikan bahwa suatu unit daerah tidak bertetangga dengan dirinya sendiri. Kesimetrisan matriks **C** didasarkan pada hubungan timbal balik dari hubungan spasial di mana $c_{ij} = c_{ji}$. Pada n elemen dalam sistem geografis, matriks kontiguitas **C** dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

dengan notasi penjumlahan baris ke-*i* adalah sebagai berikut:

$$c_{i.} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \quad (2.6)$$

di mana:
C : matriks kontiguitas berukuran $n \times n$
c_{ij} : elemen pada matriks kontiguitas pada lokasi i dan j; $i = 1,2,\ldots,n$; $j = 1,2,\ldots,n$
$c_{i.}$: jumlah baris ke-i pada matriks ***C***

2.5 Matriks Pembobot Spasial

Matriks pembobot spasial dapat digunakan untuk mengetahui kedekatan atau hubungan spasial antar wilayah yang diperoleh berdasarkan ketetanggaan dengan wilayah lain. Matriks pembobot yaitu matriks yang elemen-elemennya adalah nilai pembobot yang diberikan untuk perbandingan antar wilayah tertentu. Pembobotan tersebut didasarkan pada hubungan spasial antar daerah (Ngudiantoro, 2004). Pada prinsipnya, matriks ini adalah matriks kontiguitas yang telah distandarisasi. Matriks pembobot spasial sangat bermanfaat pada pemodelan ekonometrika untuk mengetahui adanya efek spasial pada data. Elemen-elemen pada matriks pembobot spasial (***W***) adalah w_{ij} yang menunjukkan besar pengaruh tetangga terhadap suatu lokasi. Nilai w_{ij} dapat dihitung berdasarkan persamaan berikut:

$$w_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} c_{ij}} \tag{2.7}$$

Jika baris ke-i pada matriks pembobot spasial dijumlahkan maka hasilnya sama dengan 1.

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij} = 1 \tag{2.8}$$

Sehingga, bentuk matriks pembobot spasial beserta elemen penyusunnya adalah sebagai berikut:

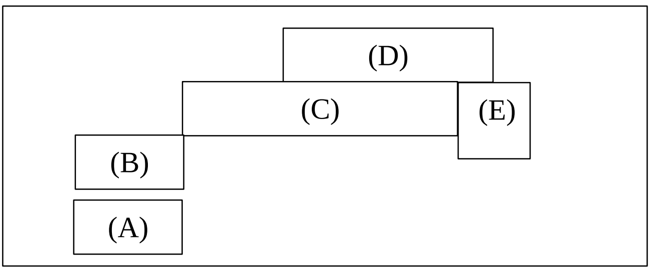
$$\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{bmatrix}$$

di mana,
W : matriks pembobot spasial berukuran $n \times n$
$\boldsymbol{w_{ij}}$: elemen matriks pembobot spasial; berupa bobot ketetanggaan lokasi i dengan lokasi j; $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,n$

Matriks ***W*** memiliki beberapa karakteristik menarik. Pertama, semua elemen diagonalnya adalah 0, karena diasumsikan bahwa suatu wilayah tidak berdekatan dengan dirinya sendiri. Kedua, matriks ***W*** adalah matriks simetris di mana $w_{ij} = w_{ji}$ (LeSage, 1999).

Beberapa metode untuk mendefinisikan hubungan persinggungan *(contiguity)* antar lokasi menurut LeSage (1999) antara lain sebagai berikut:

a. Persinggungan tepi *(Linear Contiguity)*
   Lokasi yang berada di kiri maupun kanan dari lokasi yang menjadi perhatian diberi pembobotan $c_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $c_{ij} = 0$.
b. Persinggungan sisi *(Rook Contiguity)*
   Lokasi yang bersisian dengan lokasi yang menjadi perhatian diberi pembobotan $c_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $c_{ij} = 0$.
c. Persinggungan sudut *(Bishop Contiguity)*
   Lokasi yang titik sudutnya bertemu dengan lokasi yang menjadi perhatian diberi pembobotan $c_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $c_{ij} = 0$.
d. Persinggungan dua tepi *(Double Linear Contiguity)*
   Lokasi yang berada di sisi kiri dan kanan dengan lokasi yang menjadi perhatian diberi pembobotan $c_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $c_{ij} = 0$.
e. Persinggungan dua sisi *(Double Rook Contiguity)*
   Lokasi yang berada di sisi kiri, kanan, utara, dan selatan dengan lokasi yang menjadi perhatian diberi pembobotan $c_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $c_{ij} = 0$.
f. Persinggungan sisi sudut *(Queen Contiguity)*
   Lokasi yang bersisian atau titik sudutnya bertemu dengan lokasi yang menjadi perhatian diberi pembobotan $c_{ij} = 1$, sedangkan untuk lokasi lainnya adalah $c_{ij} = 0$.



Gambar 2.1. Ilustrasi posisi ketetanggaan dengan satu wilayah berada di pulau yang berbeda (LeSage, 1999)

2.7.1 *Queen's Move Contiguity*

Matriks pembobot spasial metode *Queen's Move Contiguity* adalah modifikasi dari *Queen Contiguity* (persinggungan sisi-sudut). Menurut LeSage (1999), matriks *contiguity* dengan persinggungan sisi-sudut (*Queen Contiguity*) yang telah dimodifikasi menjadi *Queen's Move Contiguity* berdasarkan ilustrasi pada Gambar 2.1 adalah:

$$
\boldsymbol{C} = \begin{array}{c} i,j \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Kemudian matriks $\boldsymbol{W}$ tersebut distandarisasikan menjadi:

$$
\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}
$$

Baris dan kolom menyatakan wilayah yang ada pada peta. Matriks pembobot spasial merupakan matriks simetris dengan kaidah bahwa diagonal utama selalu nol karena diasumsikan bahwa suatu daerah tidak berdekatan dengan dirinya sendiri.

Jawa Timur merupakan provinsi dengan aktivitas ekonomi yang cukup tinggi di Indonesia. Provinsi ini memiliki wilayah-wilayah yang tidak semuanya berdekatan dan berbatasan langsung satu sama lain, salah satunya adalah kabupaten-kabupaten di Pulau Madura yang tidak berbatasan langsung dengan kabupaten/kota di Pulau Jawa karena dipisahkan oleh Selat Madura. Namun aktivitas perekonomian masih tetap berjalan dengan adanya Jembatan Surabaya-Madura (Suramadu) dan alat transportasi air yang berlalu-lalang antara Pulau Jawa dan Madura. Menurut Arbia (2014), kondisi wilayah yang terpisah tersebut dapat diterapkan matriks pembobot spasial metode *Queen Contiguity* karena dapat dimodifikasi menjadi *Queen's Move* yang mampu mencakup seluruh penjuru arah (tidak terbatas). Sehingga, kabupaten-kabupaten di Pulau Madura yang tidak berbatasan langsung dengan kabupaten/kota di Pulau Jawa dapat dianggap berdekatan melalui penerapan *Queen's Move*.

2.7.2 *Rook Contiguity*

Selain menggunakan *Queen's Move Contiguity*, matriks pembobot spasial metode *Rook Contiguity* juga dapat diterapkan pada kabupaten/kota di Jawa Timur karena ada kabupaten/kota pada provinsi tersebut yang bersinggungan sisi dan *Rook Contiguity* juga dapat digunakan pada data ekonomi. Matriks *contiguity* dengan *Rook Contiguity* berdasarkan ilustrasi pada Gambar 2.1 adalah:

$$
\boldsymbol{C} = \begin{array}{c} i,j \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}
$$

Kemudian matriks $\boldsymbol{W}$ tersebut distandarisasikan menjadi:

$$
\boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}
$$

2.6 Model Regresi Spasial

Regresi spasial merupakan pengembangan teori dari regresi linier klasik. Regresi spasial pertama kali diperkenalkan oleh Anselin (1988) berdasarkan hukum Tobler I yang menyatakan bahwa segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lain, tetapi sesuatu yang dekat memiliki pengaruh yang lebih besar daripada sesuatu yang jauh. Data yang digunakan pada analisis regresi spasial adalah data *cross section*, yaitu data yang dikumpulkan dalam kurun waktu tertentu dari sampel (Widarjono, 2007).

Pemodelan spasial dapat dibedakan menjadi pemodelan dengan pendekatan titik dan area. Jenis pendekatan titik diantaranya *Geographically Weighted Regression* (GWR), *Geographically Weighted Poisson Regression* (GWPR), *Geographically Weighted Logistic Regression* (GWLR), *Space-Time Autoregressive* (STAR), dan *Generalized Space TimeAutregressive* (GSTAR). Menurut LeSage dan Pace (2009), jenis pendekatan area diantaranya *Spatial Durbin Model* (SDM), *Spatial Lag X* (SLX), *Spatial Autoregressive Models* (SAR), *Spatial Error Models* (SEM), *Spatial Durbin Error Model* (SDEM), dan *Spatial Autoregressive Confused* (SAC).

2.5 Asumsi pada Regresi Spasial

2.5.1 Normalitas Sisaan

Salah satu asumsi klasik yang harus dipenuhi dalam analisis regresi adalah galat menyebar normal. Uji normalitas yang dapat digunakan adalah uji *Jarque-Bera* yang merupakan uji yang memperhitungkan nilai *skewness* dan kurtosis dari sisaan model (Gujarati, 2006). Adapun hipotesis yang melandasi pengujian ini adalah sebagai berikut:

H_0 : galat menyebar normal vs

H_1 : galat tidak menyebar normal

Statistik uji *Jarque-Bera* adalah sebagai berikut:

$$JB = \frac{n}{6}\left[SK^2 + \frac{(K-3)^2}{4}\right] \tag{2.9}$$

dengan,

$$SK = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y})^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y})^2\right]^{3/2}} \tag{2.10}$$

$$K = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y})^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y})^2\right]^{2}} \tag{2.11}$$

Keterangan:

n : banyak pengamatan

SK : nilai *skewness*

K : nilai kurtosis

y_i : nilai peubah respon dari model regresi spasial

$\hat{y}$: nilai duga peubah respon dari model regresi spasial

Kaidah keputusan yang diambil adalah jika nilai *JB* kurang dari $\chi^2_{(\alpha,p)}$, maka H_0 diterima. Artinya, sisaan menyebar normal.

2.5.2 Non Multikolinieritas

Non multikolinieritas adalah tidak adanya hubungan linier antar peubah prediktor dalam suatu model regresi yang menyebabkan ketidakbebasan antar peubah tersebut. Dalam asumsi regresi klasik, antar peubah prediktor tidak diperbolehkan terdapat multikolinieritas atau hubungan linier antar peubah prediktornya. Untuk mendeteksi multikolinieritas dapat dilakukan dengan melihat nilai VIF *(Variance Inflation Factor)*:

$$VIF = \frac{1}{(1-R_j{}^2)} \tag{2.12}$$

$R_j{}^2$ adalah koefisien determinasi dari *auxiliary regression* (regresi dengan x_j sebagai peubah endogen dan peubah *x* lainnya sebagai peubah eksogen). Nilai $R_j{}^2$ dapat dihitung berdasarkan rumus sebagai berikut:

$$R_j^2 = \frac{\sum_{j=1}^{p}\left(\widehat{y_j}-\bar{y}\right)^2}{\sum_{j=1}^{p}\left(y_j-\bar{y}\right)^2} \tag{2.13}$$

Munurut Gujarati (2004), nilai koefisien determinasi (R_j^2) berkisar antara 0 sampai dengan 1 sehingga nilai VIF akan naik seiring dengan kenaikan koefisien determinasi dari *auxiliary regression*.

$$\text{VIF} \begin{cases} < 10, \text{ tidak ada multikolinieritas} \\ \geq 10, \text{ terdapat multikolinieritas} \end{cases}$$

2.5.3 Autokorelasi Spasial

Autokorelasi merupakan salah satu uji asumsi klasik yang digunakan untuk mengetahui ada tidaknya korelasi pada sisaan. Autokorelasi yang terjadi pada data spasial disebut dengan autokorelasi spasial yang merupakan salah satu pengaruh spasial *(spatial effects)*. Autokorelasi spasial adalah taksiran dari korelasi antar nilai amatan yang berkaitan dengan lokasi spasial pada variabel yang sama. Autokorelasi spasial positif menunjukkan adanya kemiripan nilai dari lokasi-lokasi yang berdekatan dan cenderung berkelompok. Sedangkan autokorelasi spasial negatif menunjukkan bahwa lokasi-lokasi yang berdekatan mempunyai nilai yang berbeda dan cenderung menyebar.

Autokorelasi spasial diekspresikan melalui pembobotan dalam bentuk matriks yang menggambarkan kedekatan hubungan antar pengamatan atau lebih dikenal sebagai matriks pembobot. Karekteristik dari autokorelasi spasial yang diungkapkan oleh Kosfeld (2006), yaitu:

1. Jika terdapat pola sistematis pada distribusi spasial dari peubah yang diamati, maka terdapat autokorelasi spasial.
2. Jika kedekatan atau ketetanggaan antar daerah lebih dekat, maka dapat dikatakan ada autokorelasi spasial positif.
3. Autokorelasi spasial negatif menggambarkan pola ketetanggaan yang tidak sistematis.
4. Pola acak dari data spasial menunjukkan tidak ada autokorelasi spasial.

Pengujian asumsi autokorelasi spasial pada sisaan dilakukan sebanyak dua kali. Pengujian pertama dilakukan pada sisaan model regresi untuk mengetahui apakah data yang digunakan dapat dianalisis menggunakan regresi spasial atau tidak. Sedangkan pengujian asumsi autokorelasi spasial kedua dilakukan setelah didapatkan model regresi spasial yang paling baik. Pengujian tersebut untuk melihat sisaan sudah tidak mengandung autokorelasi spasial yang menandakan bahwa model merupakan model yang paling baik.

Pengukuran autokorelasi spasial untuk data spasial dapat dihitung menggunakan *Moran's Index* (biasanya disebut *Moran's I*). *Moran's I* merupakan metode yang paling banyak digunakan untuk menghitung autokorelasi spasial secara global. Metode ini dapat digunakan untuk mendeteksi permulaan dari keacakan spasial. Keacakan spasial ini dapat mengindikasikan adanya pola-pola yang mengelompok atau membentuk tren terhadap ruang (Kosfeld, 2006). Hipotesis yang menyatakan keberartian autokorelasi spasial pada peubah prediktor (X) dapat dituliskan sebagai berikut:

H_0 : $I = 0$ (tidak terdapat autokorelasi spasial) vs

H_1 : $I \neq 0$ (terdapat autokorelasi spasial)

Menurut Kosfeld (2006), statistik uji *Moran's I* yang digunakan untuk menguji hipotesis tersebut adalah:

$$I = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}(x_i-\bar{x})(x_j-\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \quad (2.14)$$

Keterangan:

I : *Moran's I*

n : banyaknya lokasi kejadian

x_i : nilai atribut yang menjadi perhatian pada lokasi ke-*i*, *i* = 1,2,…,*n*

x_j : nilai atribut yang menjadi perhatian pada lokasi ke-*j*, *j* = 1,2,…,*n*

$\bar{x}$: rata-rata atribut pada lokasi *i* (x_i) dari *n* lokasi

w_{ij} : nilai pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j* dari matriks pembobot spasial ***W***

Rentang nilai dari *Moran's I* adalah -1 hingga 1. Jika nilai *Moran's I* berada dalam rentang $-1 \leq I < 0$ maka menunjukkan adanya autokorelasi spasial negatif, sedangkan jika berada dalam rentang $0 < I \leq 1$ maka menunjukkan adanya autokorelasi spasial positif. Jika *Moran's I* bernilai 0, maka mengindikasikan tidak adanya autokorelasi. Namun, nilai statistik *I* perlu dibandingkan dengan nilai harapan *I* yang didefinisikan sebagai berikut:

$$E(I) = -\frac{1}{n-1} \quad (2.15)$$

Statistik uji *Moran's I*, yaitu:

$$Z(I) = \frac{1-E(I)}{\sqrt{Var(I)}} \quad (2.16)$$

Ragam *I* didefinisikan sebagai berikut:

$$Var(I) = \frac{n^2S_1-nS_2+3{S_0}^2}{(n^2-1){S_0}^2} - [E(I)]^2 \quad (2.17)$$

dengan,

$$S_0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \quad (2.18)$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(w_{ij}+w_{ji}\right)^2 \quad (2.19)$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij}+\sum_{j=1}^{n} w_{ji}\right)^2 \quad (2.20)$$

Nilai *Z(I)* dibandingkan dengan $Z_{\alpha/2}$ untuk mengetahui apakah nilai autokorelasi spasial tersebut signifikan atau tidak. Jika nilai *Z(I)* lebih besar dari $Z_{\alpha/2}$ maka H_0 ditolak yang berarti terdapat autokorelasi spasial.

2.5.4. Heterogenitas Spasial

Heterogenitas spasial ditunjukkan pada bentuk ragam sisaan yang tidak konstan secara spasial. Heterogenitas spasial dapat diuji dengan menggunakan uji *Breusch-Pagan* (BP). Uji ini digunakan untuk mengetahui apakah sisaan homogen atau heterogen. Adapun hipotesis yang melandasi pengujian ini adalah sebagai berikut:

H_0 : ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = \ldots = {\sigma_n}^2 = \sigma^2$ (homoskedastisitas spasial) vs

H_1 : paling tidak terdapat satu ${\sigma_i}^2 \neq \sigma^2$ (heteroskedastisitas spasial), di mana $i = 1, 2, \ldots, n$.

Statistik uji BP adalah sebagai berikut (Anselin, 1988):

$$BP = \frac{1}{2}\left[\mathbf{f}^T \boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Z}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{f}\right] \tag{2.21}$$

Nilai elemen vektor **f** adalah sebagai berikut:

$$\mathrm{f}_i = \frac{{e_i}^2}{\left(\frac{{e_i}^2}{n} - 1\right)} \tag{2.22}$$

di mana e_i adalah sisaan ke-*i* dan **Z** merupakan matriks berukuran $n \times (k+1)$ yang mengandung vektor yang telah distandarkan.

Kriteria keputusan yang diambil adalah jika statistik uji *BP* lebih dari $\chi^2_{(\alpha,p)}$, maka H_0 ditolak yang berarti terdapat heteroskedastisitas spasial.

2.8 *Spatial Lag X*

Spatial Lag X (SLX) adalah model yang melibatkan interaksi spasial pada prediktor. Model SLX merupakan model regresi spasial yang menghasilkan dugaan parameter model regresi yang bersifat lokal. Model SLX didefinisikan sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + (\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki}) + (\theta_1 \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_{1j} + \theta_2 \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_{2j} + \ldots$$
$$+ \theta_k \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_{kj}) + \varepsilon_i$$

$$y_i = \beta_0 + \textstyle\sum_{p=1}^{k} \beta_p x_{pi} + \sum_{p=1}^{k} \theta_p \sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_{pj} + \varepsilon_i \tag{2.23}$$

Keterangan:

i : indeks lokasi, *i* = 1,2,…, *n*

j : indeks lokasi, *j* = 1,2,…, *n*

p : banyaknya peubah prediktor, *p* = 1,2,…, *k*

y_i : model SLX untuk kemiskinan pada lokasi ke-*i*

β_0 : nilai intersep model SLX

β_p : koefisien parameter regresi untuk peubah prediktor *p*

x_{pi} : nilai amatan pada prediktor ke-*p* lokasi *i*

θ_p : koefisien spasial untuk *lag* pada prediktor ke-*p*

w_{ij} : elemen matriks pembobot spasial pada lokasi ke-*i* dengan lokasi tetangga ke-*j* yang sudah distandarisasi

x_{pj} : nilai amatan pada peubah prediktor ke-*p* lokasi tetangga ke-*j*

ε_i : sisaan model SLX pada lokasi ke-*i*

Persamaan (2.20) dapat dibentuk dalam matriks seperti persamaan (2.21) seperti berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{WX\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.21}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

di mana,

$\boldsymbol{Y}$: peubah respon dalam bentuk ukuran vektor berukuran $n \times 1$
$\boldsymbol{\beta_0}$: intersep model SLX
$\boldsymbol{X}$: peubah respon dalam bentuk ukuran vektor berukuran $n \times p$
$\boldsymbol{\beta}$: koefisien parameter regresi dalam bentuk vektor berukuran $p \times 1$
$\boldsymbol{W}$: matriks pembobot spasial berukuran $n \times n$
$\boldsymbol{\theta}$: koefisien spasial untuk *lag* pada peubah prediktor berukuran $p \times 1$
$\boldsymbol{\varepsilon}$: sisaan dalam bentuk vektor berukuran $n \times 1$ yang berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan ragam $\sigma^2 \boldsymbol{I}$

Persamaan (2.23) dapat diekspresikan menjadi:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.24}$$

dengan $\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{X_2} \quad \boldsymbol{X_3} \quad \boldsymbol{WX_1} \quad \boldsymbol{WX_2} \quad \boldsymbol{WX_3}]$ dan $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$.

Pada persamaan (2.24) memiliki bentuk yang mirip dengan regresi linier, yaitu:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.25}$$

di mana **Z** pada persamaan (2.24) adalah **X** pada persamaan (2.25). Apabila terdapat tiga peubah prediktor dalam model, maka dapat dimisalkan $\boldsymbol{X_4}$ sebagai $\boldsymbol{WX_1}$, $\boldsymbol{X_5}$ sebagai $\boldsymbol{WX_2}$, dan $\boldsymbol{X_6}$ sebagai $\boldsymbol{WX_3}$, sehingga pada persamaan (2.23) dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{*}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.26}$$

di mana $\boldsymbol{X}^{*} = [\boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{X_2} \quad \boldsymbol{X_3} \quad \boldsymbol{X_4} \quad \boldsymbol{X_5} \quad \boldsymbol{X_6}]$

2.9 Pendugaan Parameter Model SLX

Pendugaan parameter untuk model SLX dapat dilakukan dengan *Ordinary Least Square* (OLS) sesuai dengan persamaan (2.23). Penduga OLS untuk β adalah sebagai berikut:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}^{*\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}^{*}\right)^{-1}\boldsymbol{X}^{*\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y} \tag{2.27}$$

2.10 *Spatial Autoregressive*

Spatial Autoregressive (SAR) adalah model yang hanya melibatkan interaksi spasial pada respon. Menurut LeSage dan Pace (2009), model SAR adalah model yang mengikuti proses *autoregressive*, yaitu proses yang ditunjukkan dengan adanya hubungan ketergantungan antar sekumpulan pengamatan atau lokasi. SAR adalah kombinasi dari model regresi biasa dengan model regresi spasial lag pada peubah respon. Model SAR dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y_i = \delta \sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j + \beta_0 + (\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki}) + \varepsilon_i$$

$$y_i = \delta \textstyle\sum_{j=1}^{n} w_{ij} y_j + \beta_0 + \sum_{p=1}^{k} \beta_p x_{pi} + \varepsilon_i \qquad (2.28)$$

Keterangan:

i : indeks lokasi, *i* = 1,2,…, *n*

j : indeks lokasi, *j* = 1,2,…, *n*

p : banyaknya peubah prediktor, *p* = 1,2,…, *k*

y_i : model SAR untuk kemiskinan pada lokasi ke-*i*

δ : koefisien spasial untuk *lag* pada paubah respon

w_{ij} : elemen matriks pembobot spasial pada lokasi ke-*i* dengan lokasi tetangga ke-*j* yang sudah distandarisasi

y_j : model SAR untuk kemiskinan pada lokasi tetangga ke-*j*

β_0 : nilai intersep model SAR

β_p : koefisien parameter regresi untuk peubah prediktor *p*

x_{pi} : nilai amatan pada peubah prediktor ke-*p* lokasi *i*

ε_i : sisaan model SAR pada lokasi ke-*i*

Persamaan (2.28) dapat dibentuk dalam matriks seperti persamaan (2.29) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \delta \boldsymbol{W}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2.29)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

di mana,

$\boldsymbol{Y}$: peubah respon dalam bentuk vektor berukuran *n* × 1

δ : koefisien spasial untuk *lag* pada peubah respon berukuran *n* × 1

$\boldsymbol{W}$: matriks pembobot spasial berukuran *n* × *n*

$\boldsymbol{\beta_0}$: intersep model SAR

$\boldsymbol{X}$: peubah prediktor dalam bentuk matriks berukuran *n* × *p*

$\boldsymbol{\beta}$: koefisien parameter regresi dalam bentuk vektor berukuran *p* × 1

$\boldsymbol{\varepsilon}$: sisaan dalam bentuk vektor berukuran *n* × 1 yang berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan ragam $\sigma^2 \boldsymbol{I}$

Persamaan (2.29) dapat diekspresikan menjadi:

$$\boldsymbol{Y} = \delta \boldsymbol{W}\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{Y} - \delta \boldsymbol{W}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(\boldsymbol{I} - \delta \boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \delta \boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \qquad (2.30)$$

di mana $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{X_2} \quad \boldsymbol{X_3}]$ dan $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\,]^T$

Turunan dari persamaan (2.30) terhadap $\boldsymbol{Y}$ akan membentuk fungsi *Jacobian* seperti berikut:

$$\boldsymbol{J} = \left|\frac{\partial \varepsilon}{\partial Y}\right| = |\boldsymbol{I} - \delta \boldsymbol{W}|$$

$$L(\sigma^2;\boldsymbol{\varepsilon}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right) \quad (2.31)$$

$$L(\delta,\beta,\sigma^2|Y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} (\boldsymbol{J})\ exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right) \quad (2.32)$$

Substitusi persamaan (2.30) dan fungsi *Jacobian* pada persamaan (2.32) yang akan menghasilkan persamaan (2.33) sebagai berikut:

$$L(\delta,\beta,\sigma^2|Y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} |\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W}|\ exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}\right)^T((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})\right]\right\} \quad (2.33)$$

Operasi logaritma natural *likelihood* pada persamaan (2.33) sehingga menjadi:

$$ln(L) = \frac{n}{2} ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right) + ln|\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W}| - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}\right)^T((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})\right]$$

$$ln(L) = -\frac{n}{2} ln(2\pi) - \frac{n}{2} ln(\sigma^2) + ln|\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W}| - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}\right)^T((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})\right] \quad (2.34)$$

Parameter β, δ, dan σ^2 dapat diduga dengan cara memaksimumkan fungsi *ln(L)* pada persamaan (2.33).

2.11 Pendugaan Parameter Model SAR

2.11.1 Pendugaan Parameter $\boldsymbol{\beta}$

Pendugaan parameter β dapat diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi ln *likelihood* pada persamaan (2.34) yaitu melalui turunan persamaan tersebut terhadap β.

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial\beta} = 0$$

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial\beta} = \frac{\partial\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})\right]\right\}}{\partial\beta}$$

$$0 = \frac{\partial\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\delta W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})\right]\right\}}{\partial\beta}$$

$$0 = [\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X\beta}]$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} \quad (2.35)$$

Sehingga didapatkan perdugaan parameter untuk β sebagai berikut:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Y} - \delta\left(\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{WY} = \hat{\rho}_0 - \delta\hat{\rho}_d \quad (2.36)$$

Penduga ρ_0 dan ρ_d didapatkan dari model $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\rho_0} + \boldsymbol{e_0}$ dan $\boldsymbol{WY} = \boldsymbol{X\rho_d} + \boldsymbol{e_d}$ melalui model OLS yang akan dijelaskan di subbab 2.10.3. Apabila telah didapatkan pendugaan δ, pendugaan untuk parameter β menjadi $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{0}} - \hat{\boldsymbol{\delta}}\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{d}}$.

2.11.2 Pendugaan Parameter $\boldsymbol{\sigma^2}$

Pendugaan parameter σ^2 dapat diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi ln *likelihood* pada persamaan (2.34) yaitu melalui turunan persamaan (2.33) terhadap σ^2.

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial \sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{n}{2(\sigma^2)^2}\left[\left((I - \delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}\left((\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}\right)\right]$$

$$0 = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{n}{2(\sigma^2)^2}\left[\left((I - \delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}\left((\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}\right)\right]$$

$$\sigma^2 = \frac{\left[\left((I-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}\right)\right]}{n} \qquad (2.37)$$

Sehingga didapatkan pendugaan parameter untuk σ^2adalah:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left[\left((I-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}\right)\right]}{n} \qquad (2.38)$$

2.11.3 Pendugaan Parameter $\boldsymbol{\delta}$

Pendugaan parameter δ dapat diketahui apabila telah didapatkan pendugaan β. Pendugaan ρ_0 dan ρ_d dilakukan berdasarkan persamaan (2.39) dan (2.40) menggunakan metode OLS.

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\rho_0} + \boldsymbol{e_0} \qquad (2.39)$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\rho_d} + \boldsymbol{e_d} \qquad (2.40)$$

Hasil dari pendugaan parameter pada persamaan (2.39) dan (2.40) adalah sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\mathbf{0}} = \left(\boldsymbol{X^T X}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X^T Y} \qquad (2.41)$$

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{d}} = \left(\boldsymbol{X^T X}\right)^{-\mathbf{1}}\boldsymbol{X^T W Y} \qquad (2.42)$$

Dengan persamaan (2.41) dan (2.42) akan didapatkan residual $\boldsymbol{e_0}$ dan $\boldsymbol{e_d}$ yang disubtitusikan pada parameter σ^2 menjadi:

$$\sigma^2 = \frac{\left[(\boldsymbol{e_0}-\delta\boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0}-\delta\boldsymbol{e_d})\right]}{n} \qquad (2.43)$$

di mana $\boldsymbol{e_0} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\rho_0} +$ dan $\boldsymbol{e_d} = \boldsymbol{WY} - \boldsymbol{X\rho_d}$.

Substitusi persamaan (2.43) ke persamaan (2.44) sehingga didapatkan fungsi logaritma natural untuk menduga δ.

$$ln(L(\delta)) = -\frac{n}{2}ln(2\pi) - \frac{n}{2}ln\left(\frac{\left[(\boldsymbol{e_0}-\delta\boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0}-\delta\boldsymbol{e_d})\right]}{n}\right) + ln|\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W}| - \frac{n}{2}$$

$$ln\big(L(\delta)\big) = -\frac{n}{2}ln(2\pi) - \frac{n}{2}ln\left((\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})\right) + \frac{n}{2}ln(n) + ln|\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W}| - \frac{n}{2}$$

$$f(\delta) = c - \frac{n}{2}ln\left((\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})\right) + ln|\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W}| \quad (2.44)$$

di mana $c = -\frac{n}{2}ln(2\pi) + \frac{n}{2}ln(n) - \frac{n}{2}$

Pace dan Barry dalam LeSage dan Pace (2009) menyarankan untuk mendapatkan $\hat{\delta}$ dengan melakukan evaluasi log-*likelihood* menggunakan vektor berukuran $q \times 1$ dari nilai δ pada interval $[\delta min, \delta max]$ di mana $\delta_{min} = -1$ dan $\delta_{max} = 1$.

$$\begin{pmatrix} f(\delta_1) \\ f(\delta_2) \\ \vdots \\ f(\delta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - \frac{n}{2}ln\left((\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})\right) + ln|\boldsymbol{I} - \delta_1\boldsymbol{W}| \\ c - \frac{n}{2}ln\left((\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})\right) + ln|\boldsymbol{I} - \delta_2\boldsymbol{W}| \\ \vdots \\ c - \frac{n}{2}ln\left((\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})\right) + ln\left|\boldsymbol{I} - \delta_p\boldsymbol{W}\right| \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Kemudian dipilih nilai δ yang menghasilkan nilai fungsi pada persamaaan (2.45) yang paling maksimum.

2.12 *Spatial Durbin Model*

Spatial Durbin Model (SDM) adalah model yang melibatkan interaksi spasial pada respon dan prediktor di mana model ini merupakan pengembangan model SAR. Model SDM didefinisikan sebagai berikut:

$$y_i = \delta\sum_{j=1}^{n} w_{ij}y_j + \beta_0 + (\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki}) + (\theta_1\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{1j} + \theta_2\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{2j} + \ldots + \theta_k\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{kj}) + \varepsilon_i$$

$$y_i = \delta\sum_{j=1}^{n} w_{ij}y_j + \beta_0 + \sum_{p=1}^{k}\beta_p x_{pi} + \sum_{p=1}^{k}\theta_p\sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_{pj} + \varepsilon_i \quad (2.46)$$

Keterangan:

i : indeks lokasi, *i* = 1,2,…, *n*
j : indeks lokasi, *j* = 1,2,…, *n*
p : banyaknya peubah prediktor, *p* = 1,2,…, *k*
y_i : model SDM untuk kemiskinan pada lokasi ke-*i*
δ : koefisien spasial untuk *lag* pada paubah respon
w_{ij} : elemen matriks pembobot spasial pada lokasi ke-*i* dengan lokasi tetangga ke-*j* yang sudah distandarisasi
y_j : model SDM untuk kemiskinan pada lokasi tetangga ke-*j*
β_0 : nilai intersep model SDM
β_p : koefisien parameter regresi untuk peubah prediktor *p*

x_{pi} : nilai amatan pada peubah prediktor ke-*p* lokasi *i*
θ_p : koefisien spasial untuk *lag* pada prediktor ke-*p*
x_{pj} : nilai amatan pada peubah prediktor ke-*p* lokasi tetangga ke-*j*
ε_i : sisaan model SDM pada lokasi ke-*i*

Persamaan (2.46) dapat dibentuk dalam matriks seperti persamaan (2.47) sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \delta\boldsymbol{WY} + \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{WX\theta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.47}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2\boldsymbol{I})$$

di mana,
$\boldsymbol{Y}$: peubah respon dalam bentuk vektor berukuran $n \times 1$
δ : koefisien spasial untuk *lag* pada peubah respon berukuran $n \times 1$
$\boldsymbol{W}$: matriks pembobot spasial berukuran $n \times n$
$\boldsymbol{\beta_0}$: intersep model SDM
$\boldsymbol{X}$: peubah prediktor dalam bentuk matriks berukuran $n \times p$
$\boldsymbol{\beta}$: koefisien parameter regresi dalam bentuk vektor berukuran $p \times 1$
$\boldsymbol{\theta}$: koefisien spasial untuk *lag* pada peubah prediktor berukuran $p \times 1$
$\boldsymbol{\varepsilon}$: sisaan dalam bentuk vektor berukuran $n \times 1$ yang berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan ragam $\sigma^2\boldsymbol{I}$

Persamaan (2.48) dapat diekspresikan menjadi:

$$\boldsymbol{Y} = \delta\boldsymbol{WY} + \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{Z\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{Y} - \delta\boldsymbol{WY} = \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{Z\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$(\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{Z\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\beta} \tag{2.48}$$

di mana $\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{X_2} \quad \boldsymbol{X_3} \quad \boldsymbol{WX_1} \quad \boldsymbol{WX_2} \quad \boldsymbol{WX_3}]$ dan $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\ ]^T$

Menurut Anselin (1988), metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) digunakan untuk menduga parameter pada model SDM. Dari persamaan (2.46) dibentuk fungsi *likelihood*, pembentukan fungsi *likelihood* tersebut dilakukan melalui sisaan (ε) pada persamaan (2.48).

Turunan dari persamaan (2.48) terhadap $\boldsymbol{Y}$ akan membentuk fungsi *Jacobian* seperti berikut:

$$\boldsymbol{J} = \left|\frac{\partial\varepsilon}{\partial Y}\right| = |\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W}|$$
$$L(\sigma^2; \boldsymbol{\varepsilon}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{\varepsilon^T\varepsilon}\right)\right)$$
$$L(\delta, \beta, \sigma^2|Y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} (\boldsymbol{J})\ exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{\varepsilon^T\varepsilon}\right)\right) \tag{2.49}$$

Substitusi persamaan (2.48) dan fungsi *Jacobian* pada persamaan (2.49) yang akan menghasilkan persamaan (2.50) sebagai berikut:

$$L(\delta,\beta,\sigma^2|Y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} |\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W}|\; exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta}\right)^T((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta})\right]\right\} \quad (2.50)$$

Operasi logaritma natural *likelihood* pada persamaan (2.50) sehingga menjadi:

$$ln(L) = \frac{n}{2} ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right) + ln|\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W}| - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta}\right)^T((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta})\right]$$

$$ln(L) = -\frac{n}{2} ln(2\pi) - \frac{n}{2} ln(\sigma^2) + ln|\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W}| - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta}\right)^T((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta})\right] \quad (2.51)$$

Parameter β, δ, dan σ^2 dapat diduga dengan cara memaksimumkan fungsi *ln(L)* pada persamaan (2.50).

2.13 Pendugaan Parameter Model SDM

2.13.1 Pendugaan Parameter $\boldsymbol{\beta}$

Pendugaan parameter β dapat diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi ln *likelihood* pada persamaan (2.50) yaitu melalui turunan persamaan tersebut terhadap β.

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial\beta} = 0$$

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial\beta} = \frac{\partial\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta})\right]\right\}}{\partial\beta}$$

$$0 = \frac{\partial\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\delta W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta})\right]\right\}}{\partial\beta}$$

$$0 = [\boldsymbol{Z^T}(\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z^T Z\beta}]$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\boldsymbol{Z^T Z}\right)^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Z^T}(\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} \quad (2.52)$$

Sehingga didapatkan perdugaan parameter untuk β adalah persamaan (2.53):

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{Z^T Z}\right)^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Z^T}(\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{Z^T Z}\right)^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Z^T Y} - \delta\left(\boldsymbol{Z^T Z}\right)^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{Z^T W Y} = \hat{\rho}_0 - \delta\hat{\rho}_d \quad (2.53)$$

Penduga ρ_0 dan ρ_d didapatkan dari model $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z\rho_0} + \boldsymbol{e_0}$ dan $\boldsymbol{WY} = \boldsymbol{Z\rho_d} + \boldsymbol{e_d}$ melalui model OLS yang akan dijelaskan di subbab 2.12.3. Apabila telah didapatkan pendugaan δ, pendugaan untuk parameter β menjadi $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{0}} - \widehat{\boldsymbol{\delta}}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{d}}$.

2.13.2 Pendugaan Parameter $\boldsymbol{\sigma^2}$

Pendugaan parameter σ^2 dapat diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi ln *likelihood* pada persamaan (2.51) yaitu melalui turunan persamaan (2.51) terhadap σ^2.

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial \sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{n}{2(\sigma^2)^2}\left[\left((I - \delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}\left((\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\beta}\right)\right]$$

$$0 = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{n}{2(\sigma^2)^2}\left[\left((I - \delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}\left((\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Z\beta}\right)\right]$$

$$\sigma^2 = \frac{\left[\left((I-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta}\right)\right]}{n} \qquad (2.54)$$

Sehingga didapatkan pendugaan parameter untuk σ^2adalah:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left[\left((I-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta}\right)^{\boldsymbol{T}}\left((\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{Z\beta}\right)\right]}{n} \qquad (2.55)$$

2.13.3 Pendugaan Parameter $\boldsymbol{\delta}$

Pendugaan parameter δ dapat diketahui apabila telah didapatkan pendugaan β. Pendugaan ρ_0 dan ρ_d dilakukan berdasarkan persamaan (2.56) dan (2.57) menggunakan metode OLS.

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z\rho_0} + \boldsymbol{e_0} \qquad (2.56)$$

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z\rho_d} + \boldsymbol{e_d} \qquad (2.57)$$

Hasil dari pendugaan parameter pada persamaan (2.56) dan (2.57) adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\hat{\rho}_0} = \left(\boldsymbol{Z^TZ}\right)^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{Z^TY} \qquad (2.58)$$

$$\boldsymbol{\hat{\rho}_d} = \left(\boldsymbol{Z^TZ}\right)^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{Z^TWY} \qquad (2.59)$$

Dengan persamaan (2.58) dan (2.59) akan didapatkan residual $\boldsymbol{e_0}$ dan $\boldsymbol{e_d}$ yang disubtitusikan pada parameter σ^2 menjadi:

$$\sigma^2 = \frac{[(\boldsymbol{e_0}-\delta\boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0}-\delta\boldsymbol{e_d})]}{n} \qquad (2.60)$$

di mana $\boldsymbol{e_0} = \boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\rho_0} +$ dan $\boldsymbol{e_d} = \boldsymbol{WY} - \boldsymbol{X\rho_d}$.
Substitusi persamaan (2.60) ke persamaan (2.61) sehingga didapatkan fungsi logaritma natural untuk menduga δ.

$$ln(L(\delta)) = -\frac{n}{2}ln(2\pi) - \frac{n}{2}ln\left(\frac{[(\boldsymbol{e_0}-\delta\boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0}-\delta\boldsymbol{e_d})]}{n}\right) + ln|\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W}| - \frac{n}{2}$$

$$ln\left(L(\delta)\right) = -\frac{n}{2}ln(2\pi) - \frac{n}{2}ln\left((\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})\right) + \frac{n}{2}ln(n) + ln|\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W}| - \frac{n}{2}$$

$$f(\delta) = c - \frac{n}{2}ln\left((\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0} - \delta\boldsymbol{e_d})\right) + ln|\boldsymbol{I} - \delta\boldsymbol{W}| \qquad (2.61)$$

di mana $c = -\frac{n}{2} ln(2\pi) + \frac{n}{2} ln(n) - \frac{n}{2}$

Pace dan Barry dalam LeSage dan Pace (2009) menyarankan untuk mendapatkan $\hat{\delta}$ dengan melakukan evaluasi log-*likelihood* menggunakan vektor berukuran q × 1 dari nilai δ pada interval $[\delta min, \delta max]$ di mana $\delta_{min} = -1$ dan $\delta_{max} = 1$.

$$\begin{pmatrix} f(\delta_1) \\ f(\delta_2) \\ \vdots \\ f(\delta_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - \frac{n}{2} ln\left((\boldsymbol{e_0} - \delta \boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0} - \delta \boldsymbol{e_d})\right) + \ ln|\boldsymbol{I} - \delta_1 \boldsymbol{W}| \\ c - \frac{n}{2} ln\left((\boldsymbol{e_0} - \delta \boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0} - \delta \boldsymbol{e_d})\right) + \ ln|\boldsymbol{I} - \delta_2 \boldsymbol{W}| \\ \vdots \\ c - \frac{n}{2} ln\left((\boldsymbol{e_0} - \delta \boldsymbol{e_d})^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{e_0} - \delta \boldsymbol{e_d})\right) + \ ln\left|\boldsymbol{I} - \delta_p \boldsymbol{W}\right| \end{pmatrix} \quad (2.62)$$

Kemudian dipilih nilai δ yang menghasilkan nilai fungsi pada persamaaan (2.62) yang paling maksimum.

2.14 *Spatial Error Model*

Spatial Error Model (SEM) adalah model yang hanya melibatkan interaksi spasial pada sisaan. Model SEM dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$y_i = \beta_0 + (\beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki}) + u_j$$

$$y_i = \beta_0 + \sum_{p=1}^{k} \beta_p x_{pi} + u_j \quad (2.62)$$

$$u_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} w_{ij} u_j + \varepsilon_i \quad (2.63)$$

Keterangan:

i : indeks lokasi, *i* = 1,2,…, *n*
j : indeks lokasi, *j* = 1,2,…, *n*
p : banyaknya peubah prediktor, *p* = 1,2,…, *k*
y_i : model SEM untuk kemiskinan pada lokasi ke-*i*
β_0 : intersep model SEM
β_p : koefisien parameter regresi untuk *p* peubah prediktor
x_{pi} : nilai amatan pada peubah prediktor ke-*p* lokasi *i*
u_j : sisaan model SEM pada lokasi tetangga ke-*j*
λ : koefisien spasial untuk *lag* pada sisaan
w_{ij} : elemen matriks pembobot spasial pada lokasi ke-*i* dengan lokasi tetangga ke-*j* yang sudah distandarisasi
ε_i : sisaan model SEM pada lokasi ke-*i*

Persamaan (2.63) dapat diekspresikan seperti berikut:

$$\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{W} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{u} - \lambda \boldsymbol{W} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})^{-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.64)$$

Sehingga persamaan (2.62) dan (2.63) dapat dinyatakan dengan:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\beta_0} + \boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})^{-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.65)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$

di mana,

$\boldsymbol{Y}$: peubah respon dalam bentuk ukuran vektor berukuran n × 1

$\boldsymbol{X}$: peubah prediktor dalam bentuk ukuran vektor berukuran n × *p*

$\boldsymbol{\beta}$: koefisien parameter regresi dalam bentuk vektor berukuran *p* × 1

$\boldsymbol{W}$: matriks pembobot spasial berukuran *n* × *n*

$\boldsymbol{\lambda}$: koefisien spasial untuk *lag* pada peubah prediktor berukuran *p* × 1

$\boldsymbol{\varepsilon}$: sisaan dalam bentuk vektor berukuran *n* × 1 yang berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan ragam $\sigma^2 \boldsymbol{I}$

Persamaan (2.65) dapat dinyatakan menjadi:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})^{-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.66}$$

di mana $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{X_2} \quad \boldsymbol{X_3}]$ dan $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\ ]^T$.

Menurut Anselin (1988), metode *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) digunakan untuk menduga parameter SEM. Dari persamaan (2.66) dibentuk fungsi *likelihood*, pembentukan fungsi *likelihood* tersebut dilakukan melalui residual (ε). Hasil pembentukan fungsi tersebut yaitu:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})^{-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{Y}(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W}) - (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})\boldsymbol{X\beta}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}) \tag{2.67}$$

Turunan dari persamaan (2.67) terhadap $\boldsymbol{Y}$ akan membentuk fungsi *Jacobian* seperti berikut:

$$\boldsymbol{J} = \left|\frac{\partial \varepsilon}{\partial Y}\right| = |\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W}|$$

$$L(\sigma^2; \boldsymbol{\varepsilon}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{\varepsilon^T \varepsilon}\right)\right) \tag{2.68}$$

$$L(\lambda, \beta\sigma^2|Y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} (\boldsymbol{J})\ exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\boldsymbol{\varepsilon^T \varepsilon}\right)\right) \tag{2.69}$$

Substitusi persamaan (2.67) dan fungsi *Jacobian* ke persamaan (2.69) yang akan menghasilkan persamaan (2.70) sebagai berikut:

$$L(\boldsymbol{\beta}, \lambda, \sigma^2|Y) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} |\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W}|\ exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})\right)^T ((\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}))\right]\right\} \tag{2.70}$$

Operasi logaritma natural *likelihood* pada persamaan (2.70) sehingga menjadi persamaan (2.71).

$$ln(L) = \frac{n}{2} ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right) + ln|\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W}| - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})\right)^T ((\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}))\right]$$

$$ln(L) = -\frac{n}{2} ln(2\pi) - \frac{n}{2} ln(\sigma^2) + ln|\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W}| - \frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})\right)^T ((\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta}))\right] \tag{2.71}$$

Parameter β, λ, dan σ^2 dapat diduga dengan cara memaksimumkan fungsi *ln(L)* pada persamaan (2.71).

2.15 Pendugaan Model SEM

2.15.1 Pendugaan Parameter $\boldsymbol{\beta}$

Pendugaan parameter β dapat diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi ln *likelihood* pada persamaan (2.71) yaitu melalui turunan persamaan (2.72) terhadap β.

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial\beta} = 0$$

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial\beta} = \frac{\partial\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})\right)^T((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}))\right]\right\}}{\partial\beta}$$

$$0 = \frac{\partial\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})\right)^T((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}))\right]\right\}}{\partial\beta}$$

$$0 = [\boldsymbol{X^T}(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X^T X\beta}]$$

$$\boldsymbol{\beta} = \left(\boldsymbol{X^T X}\right)^{-1}\boldsymbol{X^T}(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} \qquad (2.72)$$

Sehingga didapatkan perdugaan parameter untuk β:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X^T X}\right)^{-1}\boldsymbol{X^T}(\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\boldsymbol{X^T X}\right)^{-1}\boldsymbol{X^T Y}-\lambda\left(\boldsymbol{X^T X}\right)^{-1}\boldsymbol{WY} = \widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{0}}-\lambda\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{d}} \qquad (2.73)$$

Penduga ρ_0 dan ρ_d didapatkan dari model $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{X\rho_0}+\boldsymbol{e_0}$ dan $\boldsymbol{WY}=\boldsymbol{X\rho_d}+\boldsymbol{e_d}$ melalui model OLS yang akan dijelaskan di subbab 2.14.3. Apabila telah didapatkan pendugaan λ, pendugaan untuk parameter β menjadi $\widehat{\boldsymbol{\beta}}=\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{0}}-\hat{\lambda}\widehat{\boldsymbol{\rho}}_{\boldsymbol{d}}$.

2.15.2 Pendugaan Parameter $\boldsymbol{\sigma^2}$

Pendugaan parameter σ^2 dapat diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi ln *likelihood* pada persamaan (2.71) yaitu melalui turunan persamaan (2.71) terhadap σ^2.

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial\sigma^2} = 0$$

$$\frac{\partial ln(L)}{\partial\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{n}{2(\sigma^2)^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})\right)^T((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}))\right]$$

$$0 = -\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{n}{2(\sigma^2)^2}\left[\left((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})\right)^T((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}))\right]$$

$$\sigma^2 = \frac{\left[\left((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta})\right)^T((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X\beta}))\right]}{n} \qquad (2.72)$$

Sehingga didapatkan pendugaan parameter untuk σ^2adalah:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\left[\left((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})\right)^T((\boldsymbol{I}-\lambda\boldsymbol{W})(\boldsymbol{Y}-\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}))\right]}{n} \quad (2.73)$$

2.15.3 Pendugaan Parameter $\boldsymbol{\lambda}$

Untuk menduga parameter λ tidak dapat diperoleh dari sisaan regresi (Anselin, 1988). Penduga λ diperoleh dari bentuk eksplisit dari *concentrated ln likelihood function*, kemudian mensubtitusikan persamaan (2.62) dan (2.63) ke dalam persamaan (2.74) berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u} \quad (2.74)$$

di mana $\boldsymbol{Z} = [\mathbf{1} \quad \boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{X_2} \quad \boldsymbol{X_3}]$ dan $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3\ ]^T$.
Jika setiap suku dikalikan dngan $(\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W})$ akan diperoleh persamaan (2.75) berikut:

$$\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W})\boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W})\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{Y} - \lambda\boldsymbol{WY} = \boldsymbol{Z\beta} - \lambda\boldsymbol{WX\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W})\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{Y} = \lambda\boldsymbol{WY} + \boldsymbol{Z\beta} - \lambda\boldsymbol{WX\beta} + (\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W})\boldsymbol{u} \quad (2.76)$$

Dengan mengabaikan konstanta, maka dengan mensubtitusikan persamaan (2.76) diperoleh persamaan (2.77) melalui fungsi *ln likelihood*:

$$lnL(\lambda) = -\frac{n}{2}ln\left[\frac{1}{n}(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{X\beta})\right] + ln|\boldsymbol{I} - \lambda\boldsymbol{W}| \quad (2.77)$$

Karena sifatnya tidak *closed form*, maka untuk mendapatkan penduga λ dapat dilakukan dengan metode iterasi.

2.16 Uji Signifikansi Parameter

2.16.1 Uji Parsial

Menurut Anselin (1988), uji signifikansi parameter secara parsial yang paling relevan dalam ekonometrika spasial adalah Uji *Wald*. Pengujian ini digunakan untuk menguji pengaruh setiap peubah prediktor dalam model. Hasil pengujian akan menunjukkan apakah suatu peubah prediktor layak untuk masuk dalam model atau tidak. Untuk menguji parameter-parameter pada model SDM, SLX, SAR dan SEM digunakan hipotesis sebagai berikut:

1. Menguji parameter δ

   $H_0 : \delta = 0$ vs

   $H_1 : \delta \neq 0$

   Statistik Uji *Wald* dapat dihitung dengan menggunakan:

   $$Wald = \frac{\hat{\delta}^2}{var(\hat{\delta})} \quad (2.78)$$

   di mana $\hat{\delta}$ merupakan penduga parameter regresi spasial δ dalam model dan $var(\hat{\delta})$ merupakan ragam penduga parameter δ.

2. Menguji parameter β

   $H_0 : \beta_p = 0$ vs

   $H_1 : \beta_p \neq 0$

Statistik Uji *Wald* dapat dihitung dengan menggunakan:

$$Wald = \frac{\hat{\beta}_p{}^2}{var(\hat{\beta}_p)} \tag{2.79}$$

di mana $\hat{\beta}_p$ merupakan penduga parameter β ke-*p* dalam model dan $var(\hat{\beta}_p)$ merupakan ragam penduga parameter β ke-*p*.

3. Menguji parameter θ

   $H_0 : \theta_p = 0$ vs

   $H_1 : \theta_p \neq 0$

   Statistik Uji *Wald* dapat dihitung dengan menggunakan:

$$Wald = \frac{\hat{\theta}_p{}^2}{var(\hat{\theta}_p)} \tag{2.80}$$

   di mana $\hat{\theta}_p$ merupakan penduga parameter θ ke-*p* dalam model dan $var(\hat{\theta}_p)$ merupakan ragam penduga parameter θ ke-*p*.

4. Menguji parameter λ

   $H_0 : \lambda = 0$ vs

   $H_1 : \lambda \neq 0$

   Statistik Uji *Wald* dapat dihitung dengan menggunakan:

$$Wald = \frac{\hat{\lambda}^2}{var(\hat{\lambda})} \tag{2.81}$$

   di mana $\hat{\lambda}$ merupakan penduga parameter λ dalam model dan $var(\hat{\lambda})$ merupakan ragam penduga parameter λ.

Ragam penduga parameter model SLX pada persamaan (2.22) didapatkan dari diagonal utama matriks $(\boldsymbol{Z^T Z})^{-1}\sigma^2$ di mana $\sigma^2 = \frac{\boldsymbol{e^T e}}{n-(k+1)}$. Model SAR pada persamaan (2.27) dapat diekspresikan menjadi $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\rho A} + \boldsymbol{\varepsilon}$ di mana $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{WY} \quad \boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{X_2} \quad \boldsymbol{X_3}]$ dan $\boldsymbol{\rho} = [\delta \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3]^T$ sehingga ragam penduga parameternya didapatkan dari diagonal utama matriks $(\boldsymbol{A^T A})^{-1}\sigma^2$. Model SDM pada persamaan (2. 46) dapat diekspresikan menjadi $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\tau B} + \boldsymbol{\varepsilon}$ di mana $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{WY} \quad \boldsymbol{1} \quad \boldsymbol{X_1} \quad \boldsymbol{X_2} \quad \boldsymbol{X_3} \quad \boldsymbol{WX_1} \quad \boldsymbol{WX_2} \quad \boldsymbol{WX_3}]$ dan $\boldsymbol{\tau} = [\delta \quad \beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3]^T$ sehingga ragam penduga parameternya didapatkan dari diagonal utama matriks $(\boldsymbol{B^T B})^{-1}\sigma^2$. Menurut Anselin (1988), kaidah keputusan yang diambil adalah jika nilai *Wald* > $\chi^2_{(\alpha,1)}$ atau *p-value* < α (0.05), maka H_0 ditolak. Artinya, parameter signifikan. *P-value* dapat dihitung dengan memanfaatkan sebaran *Z* di mana $P\left(Z > Z_{hitung}\right) = P\left(Z^2 > (Z_{hitung})^2\right) = P(\chi_1{}^2 > Wald)$.

2.16.2 Uji Simultan

Pengujian secara simultan dapat dilakukan dengan menggunakan uji F. Selain menguji pengaruh semua peubah prediktor terhadap model, uji ini juga dapat digunakan untuk menguji kesesuaian model. Menurut Arbia (2014), hipotesis yang melandasi pengujian ini adalah sebagai berikut:

H_0 : $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ vs

H_1 : paling tidak terdapat $\beta_i \neq 0$, dimana $i = 1,2,\ldots,k$

Statistik uji F adalah sebagai berikut:

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{(1-R^2)/(n-k)} \tag{2.82}$$

di mana *n* adalah jumlah amatan dan koefisien determinasi (R^2) dapat dihitung dengan rumus sebagi berikut:

$$R^2 = 1 - \frac{JKG}{JKT} = \frac{1-e^Te}{y^Ty-n\bar{y}} \tag{2.83}$$

Pada persamaan (2.83), JKG adalah jumlah kuadrat galat dan JKT adalah jumlah kuadrat total. Kaidah keputusan yang diambil adalah jika nilai $F > F_{\alpha;(k-1,n-k)}$ atau *p-value* < α (0.05), maka H_0 ditolak. Artnya, parameter signifikan.

2.17 Ukuran Kebaikan Model

Salah satu cara untuk melihat ukuran kebaikan suatu model adalah dengan menggunakan *Akaike Information Criterion* (AIC). AIC merupakan kriteria yang dapat mengukur kesesuaian model dalam menduga parameter model secara statistik atau untuk mengetahui seberapa dekat parameter yang diduga dengan nilai populasi yang sebenarnya. Nilai AIC secara matematik dapat dihitung dengan menggunakan rumus sebagai berikut (Anselin, 1988):

$$AIC = -2\ ln(L) + 2p \tag{2.84}$$

di mana:

L : maksimum log-likelihood

p : jumlah parameter yang digunakan pada model

Semakin kecil nilai AIC maka semakin baik model yang dihasilkan.

2.18 Efek Langsung dan Tidak Langsung

Arbia (2014) menjelaskan bahwa menginterpretasikan parameter pada model ekonometrika spasial tidak sesederhana interpretasi pada model regresi linier sederhana. Menurut LeSage dan Pace (2009), perubahan nilai peubah prediktor (X) tidak hanya mempengaruhi peubah respon (Y) pada lokasi itu sendiri (efek langsung), namun juga mempengaruhi peubah respon (Y) pada lokasi-lokasi lain secara tidak langsung (efek tidak langsung). Elhorst (2014) menyatakan bahwa model umum spasial adalah sebagai berikut:

$$\boldsymbol{Y} = \delta \boldsymbol{WY} + \boldsymbol{X\beta} + \theta \boldsymbol{WX} + \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{W} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.85}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I})$$
model tersebut dapat diekspresikan seperti berikut:
$$(\boldsymbol{I} - \delta \boldsymbol{W})\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \theta \boldsymbol{WX} + \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{I} - \delta \boldsymbol{W})^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{I} - \delta \boldsymbol{W})^{-\mathbf{1}} \theta \boldsymbol{WX} + (\boldsymbol{I} - \delta \boldsymbol{W})^{-\mathbf{1}} \boldsymbol{u} \tag{2.86}$$
sehingga diperoleh:
$$\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{I} - \delta \boldsymbol{W})^{-\mathbf{1}} (\boldsymbol{X\beta} + \theta \boldsymbol{WX} + \boldsymbol{u})$$
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{I} - \delta \boldsymbol{W})^{-\mathbf{1}} (\boldsymbol{X\beta} + \theta \boldsymbol{WX}) \tag{2.87}$$
Efek setiap peubah prediktor (X) terhadap peubah respon (Y) dideskripsikan melalui turunan parsial pada lokasi ke-1 hingga *n* yang dapat disusun dalam matriks sebagai berikut:
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial E(\boldsymbol{Y})}{\partial x_{1k}} & \cdots & \frac{\partial E(\boldsymbol{Y})}{\partial x_{nk}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial E(y_1)}{\partial x_{1k}} & \cdots & \frac{\partial E(y_1)}{\partial x_{nk}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial E(y_n)}{\partial x_{1k}} & \cdots & \frac{\partial E(y_n)}{\partial x_{nk}} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\delta W})^{-\mathbf{1}} \begin{bmatrix} \beta_k & w_{1,2}\theta_k & \cdots & w_{1,n}\theta_k \\ w_{2,1}\theta_k & \beta_k & \cdots & w_{2,n}\theta_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n,1}\theta_k & w_{n,2}\theta_k & \cdots & \beta_k \end{bmatrix} \tag{2.88}$$
Efek peubah prediktor (X) pada lokasi ke-*i* yang terlibat dalam model dapat diinterpretasikan melalui perhitungan sebagai berikut (LeSage dan Pace, 2009):

1. *Average Direct Impact* (ADI) merupakan pengukuran efek total rata-rata dari perubahan x_i terhadap y_i pada lokasi yang sama. ADI diperoleh dengan menghitung rata-rata semua elemen diagonal matriks ***S*** berdasarkan persamaan berikut:
$$ADI = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E(y_i)}{\partial X_i} \tag{2.89}$$
2. *Average Total Impact To an Observation* (ATIT) merupakan pengukuran efek yang diterima satu lokasi pengamatan akibat perubahan pada semua lokasi pengamatan lainnya. ATIT diperoleh dengan menghitung jumlah baris ke-*i* dari matriks ***S*** berdasarkan persamaan berikut:
$$ATIT = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E(y_i)}{\partial X_j} \tag{2.90}$$
3. *Average Total Impact From an Observation* (ATIF) merupakan pengukuran efek yang ditimbulkan oleh pengamatan pada satu lokasi dan semua pengamatan pada lokasi lainnya. ATIF diperoleh dengan menghitung jumlah kolom ke-*j* dari matriks ***S*** berdasarkan persamaan berikut:

$$ATIF = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial E(y_i)}{\partial X_j} \quad (2.91)$$

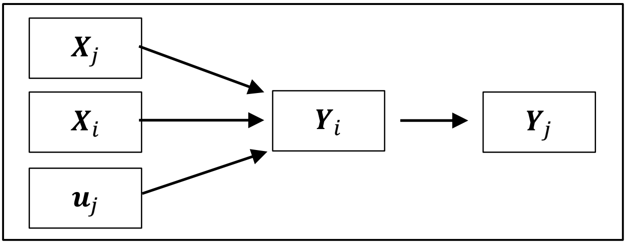
4. *Average Total Impact* (ATI) merupakan pengukuran efek rata-rata total dari perhitungan ATIT dan ATIF. ATI diperoleh dengan menghitung rata-rata semua elemen dari matriks $\boldsymbol{S}$ berdasarkan persamaan berikut:

$$ATI = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ATIT_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} ATIF_j \quad (2.92)$$

5. *Average Indirect Impact* (AII) merupakan rata-rata efek tidak langsung yang digunakan untuk mengukur pengaruh dari suatu lokasi terhadap lokasi lainnya. AII diperoleh dengan menghitung selisih rata-rata total (ATI) dan rata-rata efek langsung (ADI) pada matriks $\boldsymbol{S}$ berdasarkan persamaan berikut:

$$AII = ATI - ADI \quad (2.93)$$

Efek langsung dan tidak langsung berdasarkan model spasial penuh atau *General Nesting Spatial* (GNS) dapat diilustrasikan berdasarkan Gambar 2.2.



Gambar 2.2 Ilustrasi Efek Langsung dan Tidak Langsung

di mana:

i : indeks lokasi pengamatan, $i = 1,2,\ldots,n$
j : indeks lokasi yang bertetangga dengan i, $j = 1,2,\ldots,n$
$\boldsymbol{X_j}$: peubah prediktor pada lokasi j
$\boldsymbol{X_i}$: peubah prediktor pada lokasi i
$\boldsymbol{u_j}$: peubah tak terukur (sisaan) pada lokasi j
$\boldsymbol{Y_j}$: peubah respon pada lokasi j
$\boldsymbol{Y_i}$: peubah respon pada lokasi i

Berdasarkan Gambar 2.2, perubahan $\boldsymbol{X}$ di lokasi i memberikan efek langsung terhadap $\boldsymbol{Y}$ di lokasi i maupun secara tidak langsung terhadap $\boldsymbol{Y}$ di lokasi j (tetangga lokasi i). Perubahan $\boldsymbol{X}$ di lokasi j memberikan efek langsung terhadap $\boldsymbol{Y}$ di lokasi j maupun secara tidak langsung terhadap $\boldsymbol{Y}$ di lokasi i. Sedangkan untuk perubahan peubah tak terukur ($\boldsymbol{u}$) di lokasi j memberikan efek langsung terhadap $\boldsymbol{Y}$ di lokasi j maupun secara tidak langsung terhadap $\boldsymbol{Y}$ di lokasi i.

Efek langsung dan tidak langsung yang terjadi bisa berbeda untuk peubah prediktor yang berbeda. Efek langsung dan tidak langsung pada berbagai spesifikasi model yang berbeda-beda dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Efek langsung dan tidak langsung pada berbagai spesifikasi model

	Efek Langsung	Efek Tidak Langsung
OLS/SEM	β_k	0
SAR/SAC	Elemen diagonal matriks $(\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})^{-1}\beta_k$	Elemen selain diagonal matriks $(\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})^{-1}\beta_k$
SLX/SDEM	β_k	θ_k
SDM/GNS	Elemen diagonal matriks $(\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})^{-1}(\beta_k+\boldsymbol{W}\theta_k)$	Elemen selain diagonal matriks $(\boldsymbol{I}-\delta\boldsymbol{W})^{-1}(\beta_k+\boldsymbol{W}\theta_k)$

Sumber: Elhorst (2014)

2.19 Kemiskinan

Secara etimologis, kemiskinan berasa dari kata ‘miskin’ yang artinya tidak berharta benda dan serba kekurangan. BPS mendefinisikan kemiskinan sebagai suatu kondisi kehidupan serba kekurangan yang dialami oleh seseorang yang mempunyai pengeluaran per kapita selama sebulan yang tidak cukup untuk memenuhi kebutuhan hidup standar minimum. Dari sisi makanan, BPS menggunakan indikator yang direkomendasikan oleh Widyakara Pangan dan Gizi tahun 1998 yaitu kebutuhan gizi 2.100 kalori per orang per hari, sedangkan dari sisi kebutuhan non-makanan tidak hanya terbatas pada sandang dan papan melainkan termasuk pendidikan, kesehatan, penerangan, bahan bakar, transportasi, barang-barang tahan lama serta barang dan jasa esensial lainnya.

Menurut Todaro dan Smith (2008), kemiskinan dapat dibedakan menurut sifatnya yang terdiri atas kemiskinan absolut dan kemiskinan relatif. Konsep kemiskinan absolut adalah jumlah masyarakat yang hidup dibawah tingkat penghasilan minimum yang diperlukan untuk memenuhi kebutuhan pokok seperti makanan, pakaian dan tempat tinggal. Sementara kemiskinan relatif adalah suatu kondisi kehidupan masyarakat, meskipun tingkat pendapatan sudah mampu mencapai tingkat kebutuhan dasar minimum tetapi masih tetap jauh lebih rendah dibandingkan dengan keadaan masyarakat sekitarnya (Esmara, 1986).

Selain melakukan perhitungan jumlah penduduk miskin dalam analisis tentang penduduk miskin, BPS juga menyertakan hasil analisis tentang karakteristik rumah tangga miskin. Di dalamnya tergambar kondisi rumah tangga miskin berdasarkan karakteristik sosial demografi, pendidikan, kesehatan, sumber penghasilan, rasio ketergantungan, ketenagakerjaan, kondisi perumahan dan lain-lain. Karakteristik rumah tangga yang dianggap BPS memiliki keterkaitan erat dengan kemiskinan diantaranya adalah jumlah anggota rumah tangga, mereka yang kepala rumah tangganya berstatus sebagai janda, pendidikan kepala rumah tangga rendah atau kepala rumah tangga buta huruf, perbedaan geografis antara kota dan desa, lapangan usaha dan status pekerjaan, penguasaan luas lantai per kapita, rumah tangga tanpa akses terhadap air bersih, fasilitas buang air besar, pemanfaatan listrik dan sebagainya.

2.20 Faktor Penyebab Kemiskinan

Todaro dan Smith (2008) memperlihatkan jalinan antara kemiskinan dan keterbelakangan dengan beberapa aspek ekonomi dan aspek non ekonomi. Menurut Todaro dan Smith (2008), rendahnya taraf hidup disebabkan oleh rendahnya tingkat pendapatan, rendahnya pendapatan disebabkan oleh rendahnya tingkat produktivitas tenaga kerja, rendahnya produktivitas tenaga kerja disebabkan oleh tingginya pertumbuhan tenaga kerja, tingginya angka pengangguran dan rendahnya investasi per kapita. Tingginya angka pengangguran disebabkan oleh tingginya tingkat pertumbuhan tenaga kerja dan rendahnya investasi per kapita, kemudian tingginya pertumbuhan tenaga kerja disebabkan oleh penurunan tingkat kematian dan rendahnya investasi per kapita disebabkan oleh tingginya ketergantungan terhadap teknologi asing yang hemat tenaga kerja. Selanjutnya rendahnya tingkat pendapatan berpengaruh terhadap kesempatan pendidikan, pertumbuhan tenaga kerja dan produktivitas kerja serta tingkat kesehatan.

Studi empiris Pusat Penelitian Sosial Ekonomi Departemen Pertanian yang telah dilakukan pada tujuh belas provinsi di Indonesia menyimpulkan bahwa rendahnya sumber daya manusia merupakan salah satu faktor penyebab kemiskinan. Rendahnya sumber daya manusia tersebut ditunjukkan oleh rendahnya tingkat pendidikan, rendahnya keterampilan dan produktivitas kerja, rendahnya tingkat kesehatan, rendahnya etos kerja, kurangnya pekerjaan alternatif, tingginya angka ketergantungan dan besarnya jumlah anggota keluarga.

Berdasarkan uraian penyebab kemiskinan tersebut, dapat diketahui bahwa ada tiga faktor utama yang menyebabkan kemiskinan di Indonesia. Faktor tersebut adalah rendahnya taraf pendidikan, produktivitas dan rendahnya kesempatan kerja.

2.21 Kemiskinan di Jawa Timur

Peningkatan kesejahteraan masyarakat dan pertumbuhan ekonomi merupakan sasaran utama kegiatan pembangunan yang dilaksanakan pemerintah. Sebagai upaya untuk mewujudkan hal tersebut, pemerintah mencanangkan berbagai strategi diantaranya adalah mengurangi kemiskinan. Menurut BPS (2017), penduduk miskin di Provinsi Jawa Timur turun sebesar 0,08 %, yaitu dari 11.85% pada September 2016 menjadi 11,77% pada Maret 2017. Penurunan selama satu semester tersebut ditunjukkan dengan turunnya jumlah penduduk miskin sebesar 21,52 ribu jiwa. Ditinjau berdasarkan daerah kota dan desa, selama periode September 2016 hingga Maret 2017 penurunan persentase penduduk miskin terjadi di perkotaan (turun 0,04 %) dan di pedesaan (turun 0,01 %). Meskipun terjadi penurunan persentase penduduk miskin, Provinsi Jawa Timur merupakan provinsi dengan jumlah penduduk miskin paling banyak di Indonesia, yaitu sebanyak 4.617,01 juta jiwa.

Sebagain besar penduduk miskin di Provinsi Jawa Timur menggunakan pendapatannya untuk konsumsi makanan sehingga pengeluaran untuk pendidikan, kesehatan, pakaian, dan rumah tangga kurang mendapat perhatian. Pendidikan yang rendah mengakibatkan penduduk miskin sulit bersaing untuk mendapatkan pekerjaan formal. Hasil penelitian Utomo (2010) menyatakan bahwa faktor pekerjaan memiliki hubungan negatif terhadap kemiskinan, sehingga jika faktor pekerjaan meningkat akan menyebabkan tingkat kemiskinan menurun. Selain itu, faktor pendidikan juga memiliki hubungan negatif terhadap kemiskinan, sehingga jika faktor pendidikan meningkat akan menyebabkan kemiskinan menurun.